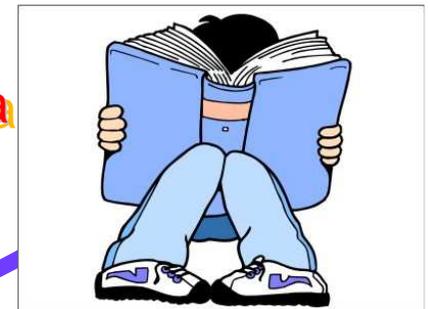


Die Eulergerade in einer hochbegabten Klasse 6 –

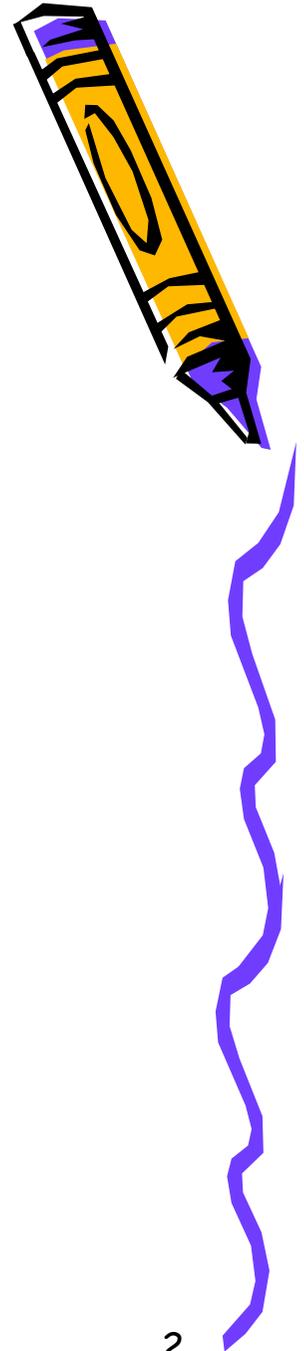
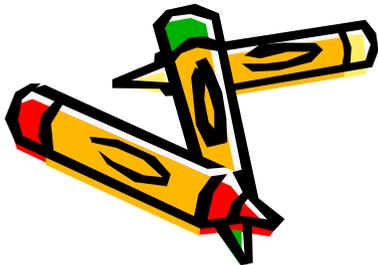
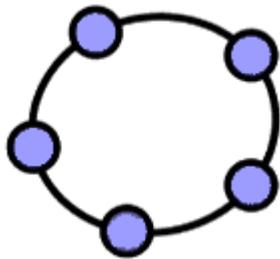
Skizze einer Unterrichtsstunde mit GeoGebra



Referentin: Christin Kostorz

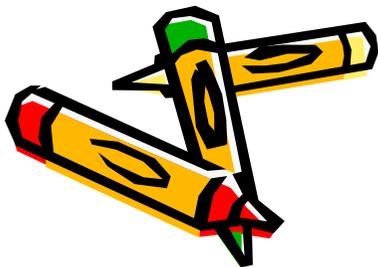
Gliederung:

- Einordnung des Themas
- Inhaltsbezogene Kompetenzen
- Prozessbezogene Kompetenzen
- Lerngruppenbedingungen
- Legitimation des Stundenthemas
 - GeoGebra
- Ablauf der Unterrichtsstunde
- Einstieg in die Unterrichtsstunde
- Gestaltung des Arbeitsblattes
 - Fazit



Einordnung des Themas

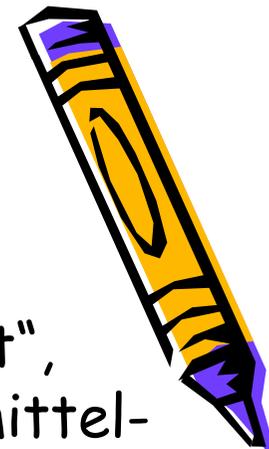
Thema der Unterrichtseinheit:	Besondere Linien am Dreieck
Thema der Unterrichtsstunde:	Lernen mit dem interaktiven Partner - Die Eulergerade
Zentrales Stundenziel:	Die Schülerinnen und Schüler sollen unter Nutzung der dynamischen Geometriesoftware „GeoGebra“ die Eulergerade entdecken, indem sie in Partnerarbeit experimentell tätig werden.
Thema der vorangehenden Stunden:	Besondere Linien am Dreieck führen zu besonderen Punkten



Inhaltsbezogene Kompetenzen

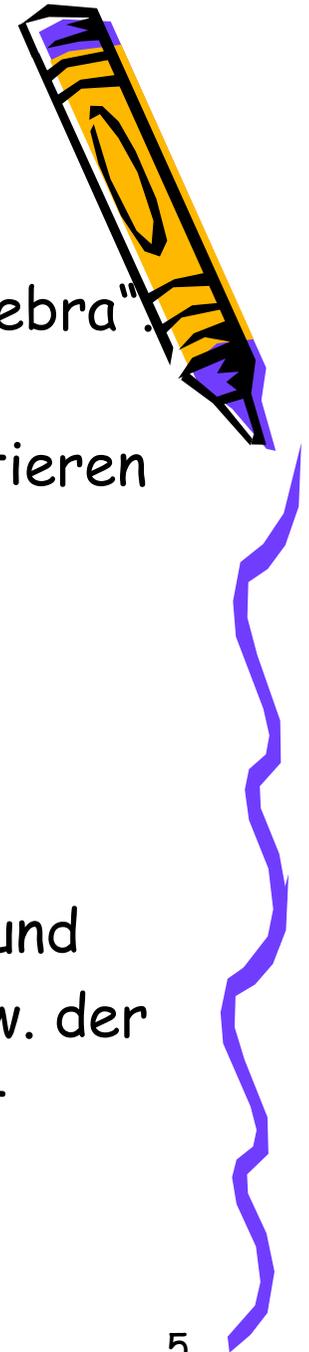
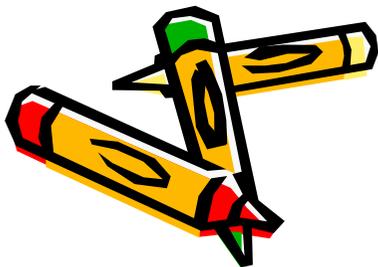
- 1.) Die SuS festigen die Begriffe „Umkreismittelpunkt“, „Schwerpunkt“, „Höhenschnittpunkt“ und „Inkreismittelpunkt“, indem sie diese den Begriffen „Mittelsenkrechte“, „Seitenhalbierende“, „Höhe“ und „Winkelhalbierende“ (besondere Linien im Dreieck) zuordnen.
- 2.) Die SuS können die genannten besonderen Linien und Punkte in einem beliebigen Dreieck mit dem DGS [\[1\]](#) „GeoGebra“ konstruieren.
- 3.) Die SuS entdecken, dass in jedem Dreieck der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und der Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten auf einer Geraden liegen.

[\[1\]](#) Dynamischen Geometrie-System



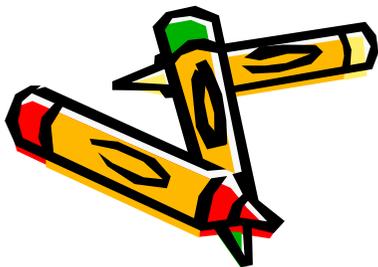
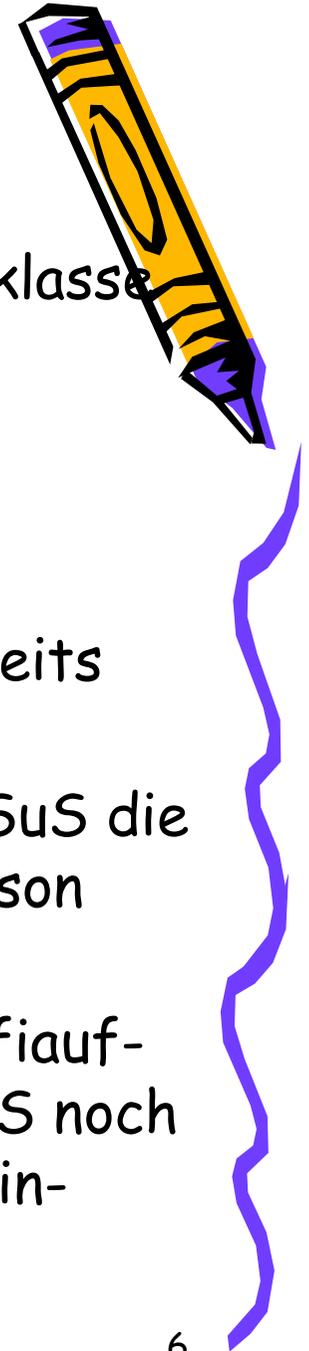
Prozessbezogene Kompetenzen

- 4.) Die SuS festigen den Umgang mit dem DGS „GeoGebra“.
- 5.) Die SuS werden eigenständig aktiv und experimentieren mathematisch.
- 6.) Die SuS kooperieren beim Problemlösen mit ihrem Partner.
- 7.) Die SuS üben das Präsentieren von Lösungswegen und Problembearbeitungen, indem sie ihrem Partner bzw. der Klasse gewonnene Ergebnisse mathematisch korrekt vortragen.



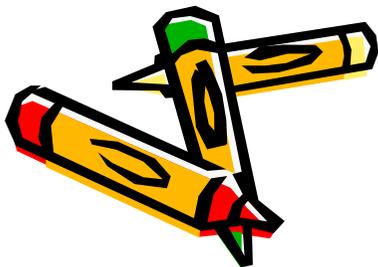
Lerngruppenbedingungen

- Klasse des „Hochbegabtenzweiges“, (Integrationsklasse aus hochbegabten und sehr leistungsstarken SuS)
- SuS insgesamt sehr motiviert, außerordentlich leistungsstark und beteiligen sich lebhaft am Unterrichtsgeschehen
- hohes Arbeitstempo und sicherer Umgang mit bereits Gelerntem
- hoher Ehrgeiz (braucht häufig sehr lange bis die SuS die Arbeit ruhen lassen und sich gänzlich auf Lehrperson konzentrieren)
- Nicht unterfordern (AB enthält weitere sog. „Profiaufgaben“, bei der sich besonders leistungsstarke SuS noch intensiver mit der gegebenen Thematik auseinandersetzen können)



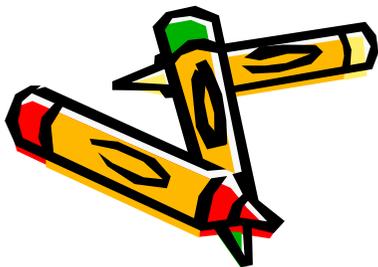
Legitimation des Stundenthemas (1)

- Besonderen Linien u. Punkte im Dreieck in geltenden Richtlinien eigentlich erst als Thema für Stufe 7/8
- Hochbegabtenförderungskonzept
 - Prinzip des Enrichment (Vertiefung)
 - Prinzip der Akzeleration (beschleunigtes Lernen)
- Themengebiet „Besondere Linien am Dreieck“ als Vertiefungsthema zur „obligatorischen Geometrie“ der Klasse 6
- Ohne solche Vertiefungsthemen Unterforderung und langfristig Desinteresse und Frustration



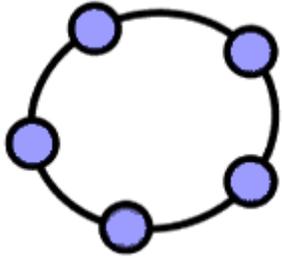
Legitimation des Stundenthemas (2)

- prozessbezogene Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans Mathematik:
„Die SuS sollen in der Lage sein neue elektronische Werkzeuge und Medien situationsangemessen einsetzen.“
- explizit angegeben, dass SuS Geometriesoftware zum Erkunden innermathematischer Zusammenhänge nutzen sollen
- Forderung sollte in der Stunde Rechnung getragen werden



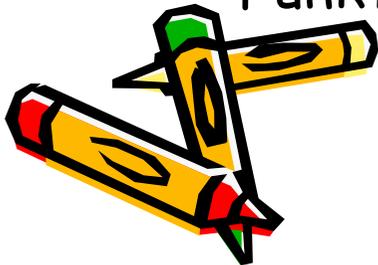
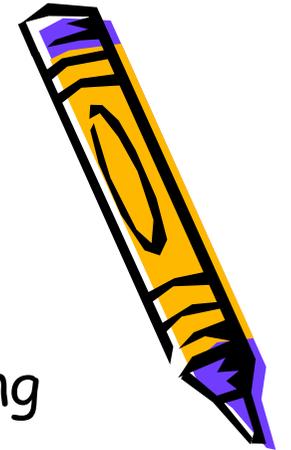
Kernlehrplan
für das Gymnasium – Sekundarstufe I (G8)
in Nordrhein-Westfalen

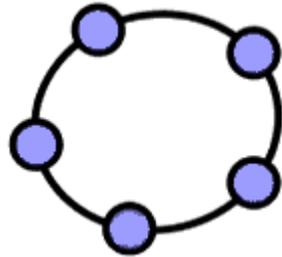
Mathematik



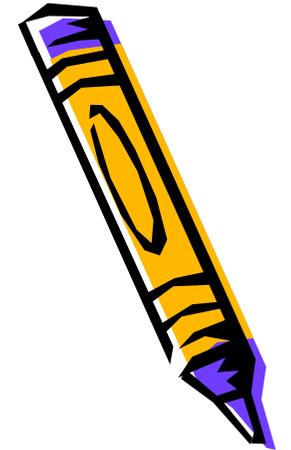
GeoGebra (1)

- Kostenfrei (auch für zu Hause), intuitive Benutzung
- computerbasiertes Werkzeug
- bietet zahlreiche Möglichkeiten um aktives, handlungsorientiertes, experimentelles und entdeckendes Lernen zu fördern
- Zugmodus (Konstruktion einer geometrischen Figur und deren Variation ersetzt viele einzelne Zirkel- und Linealkonstruktionen, die in genügendem Maße und hinreichender Schnelligkeit im Unterricht nicht zu erstellen wären.)
- Funktion „Verbergen“ - Übersichtlichkeit bleibt erhalten

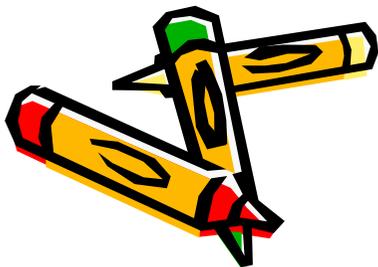




GeoGebra (2)

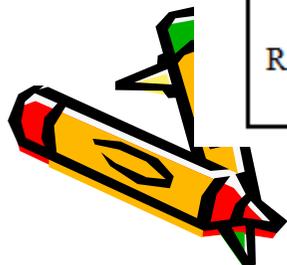
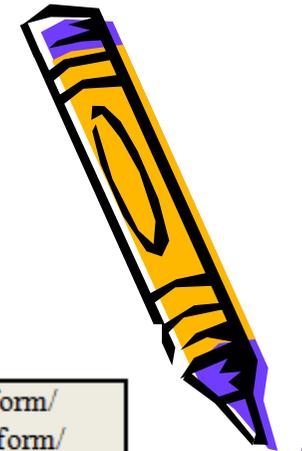


- SuS neuen Medien gegenüber sehr aufgeschlossen.
- PC immer größere Bedeutung in unserem Leben aber auch im Leben der SuS gewinnt (Informationsquelle, Kommunikationsplattform, Medium zur Freizeitgestaltung,...).
- neben Medienkompetenz auch Sozialkompetenz geschult
- zurzeit noch Weiterentwicklung von „GeoGebra“
- verwendete Notation recht schulnah



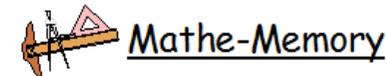
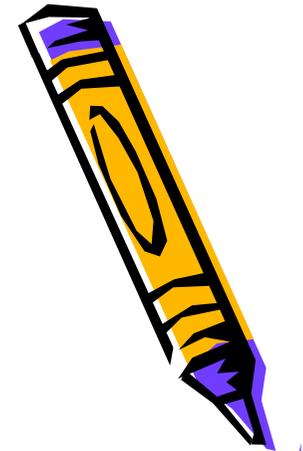
Ablauf der Unterrichtsstunde

Phase	Inhalt/ Fachmethode	Medien	Sozialform/ Arbeitsform/ Unterrichts- methode
Einstieg	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Begrüßung ➤ Darlegung wesentliches Anliegen der Stunde ➤ Spiel: Mathe-Memory 	Folie: Mathe-Memory	LV, UG
Erarbeitungsphase	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Lösen der Aufgaben auf dem AB a.)-d.), ggf. Profiaufgaben <i>Konstruktion eines Dreiecks sowie die besonderen Punkte: Umkreismittelpunkt M, Inkreismittelpunkt I, Schwerpunkt S und Höhenschnittpunkt H, anschließendes Entdecken der Eulergeraden</i> 	AB, Rechner	PA
Sicherungsphase	<ul style="list-style-type: none"> ➤ Präsentation der Schülerlösungen (auch Lösungen Profiaufgaben) 	Beamer, AB, Rechner	SV
Reflexion	<ul style="list-style-type: none"> ➤ „Was wisst ihr jetzt mehr als vor dieser Mathematikstunde?“ 		UG (ggf: Meldekette)



Einstieg in die Unterrichtsstunde

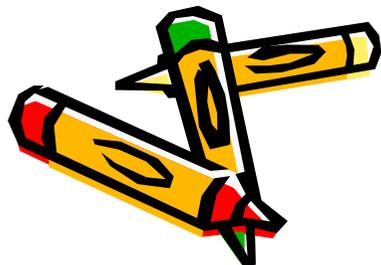
- Mittels (Zuordnung-) Memory auf Folie
- Ziel: hohe Motivation, „Spiele machen Spaß“
- Regeln:
 - zwei Gruppen (Einteilung durch Lehrer),
 - bei Paar erneut an der Reihe
 - S benennt S aus gegnerischen Team, der noch nicht an Reihe war)
 - S muss erkennen, dass es sich um Paar handelt
- Übung zum Begriffslernen
- Variation: SuS formulieren vollständige korrekte Sätze um Punkt zu gewinnen



	1	2	3	4
A	Mittelsenkrechten	Schwerpunkt	spitzer Winkel	Gerade
B	180°	360°	hat keinen Anfangs- u. Endpunkt	Seitenhalbierenden
C	überstumpfer Winkel	Inkreis	hat Anfangs- u. Endpunkt	270°
D	Höhenschnittpunkt	79°	Innenwinkelsumme Dreieck	Umkreis
E	Strecke	Winkelhalbierenden	Höhen	Vollwinkel

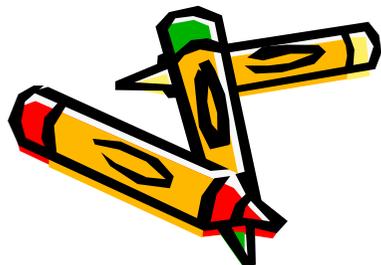
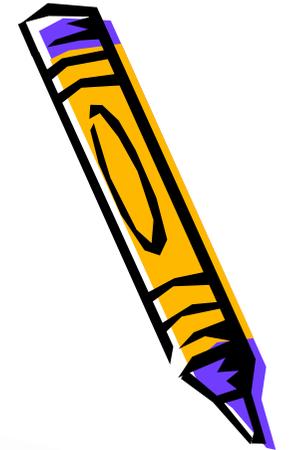
Lösungspaar:
(verdeckt)

Inkreis - Winkelhalbierende
 Umkreis - Mittelsenkrechten
 Schwerpunkt - Seitenhalbierenden
 Höhenschnittpunkt - Höhen
 Innenwinkelsumme Dreieck - 180°
 Strecke - hat Anfangs- und Endpunkt
 Gerade - hat keinen Anfangs- und Endpunkt
 79° - spitzer Winkel
 360° - Vollwinkel
 270° - überstumpfer Winkel



Gestaltung des Arbeitsblattes (1)

- Ansprechend, vielfältig, innovativ und motivierend
- Verweis auf zurückliegende Stunden
- Veränderung Objekteigenschaften mit für SuS nachvollziehbaren Sinn (bessere Unterscheidung)
- Platz zum Notieren der Antwort
- Durchführungskontrolle zum Abhaken
- Wenn-Dann-Diagramm
- Zu vervollständigende Überblickstabelle



Arbeitsblatt
Dreiecke

Arbeitsauftrag: (Partnerarbeit)

a.) Fangen wir ganz einfach an: Zeichnet mit Hilfe von „GeoGebra“ ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$. In einer der letzten Stunden habt Ihr auch gelernt, wie man Objekteigenschaften ändert. Verändert die Farbe der Seiten Eures Dreiecks, damit Ihr es später ganz leicht von anderen noch eingezeichneten Linien unterscheiden könnt.

b.) Als nächstes sollt ihr den Umkreismittelpunkt M einzeichnen. Überlegt dafür zuerst: Welche besonderen Linien müsst ihr dazu in Euer Dreieck einzeichnen?

Antwort:

Durchführungskontrolle:
 (Bitte abhaken)
 Den Umkreismittelpunkt hat bei uns auch wirklich den Namen „M“ und nicht „D“.
 Wir haben überprüft, ob der Umkreismittelpunkt auch tatsächlich von allen Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand hat.

Ihr habt beide Häkchen machen können?

```

    graph TD
      A{Ihr habt beide Häkchen machen können?} -- ja --> B[Bitte startet aeu mit a.)]
      A -- ja --> C[Weiter geht es mit c.) @]
      B --> D[c.)]
      C --> D
  
```

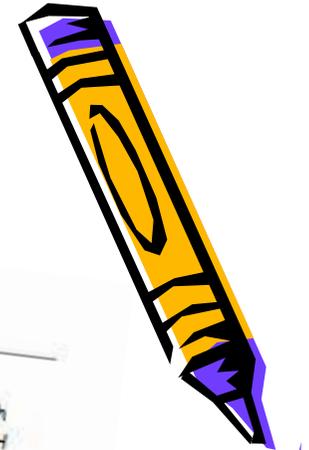
c.) Damit Eure Zeichnung nicht zu unübersichtlich wird, verbergt bitte alle Hilfslinien. Ihr sollt in „GeoGebra“ nur noch Euer Dreieck und den Punkt M anzeigen lassen. Zeichnet den Inkreismittelpunkt I , den Schwerpunkt S und den Höhenschnittpunkt H mit in das Dreieck ein.

Wir suchen den...	...und müssen dazu folgendes in das Dreieck einzeichnen:
Inkreismittelpunkt I	
Schwerpunkt S	
Höhenschnittpunkt H	

GeoGebra Klasse 6

Gestaltung des Arbeitsblattes (2)

- Offene Fragestellung
- Profifragen für Schnelle
- Historischer Bezug
- Alltagsbezug (Schweizer 10 Franken-schein)
- Merksatzbox



Arbeitsblatt
Dreiecke

 Nach jeder Konstruktion sollt ihr wieder alle nicht benötigten Linien verbergen, so dass ihr nun lediglich Euer Dreieck $\triangle ABC$ und die vier Punkte M , I , S und H seht.

d.) Verändert das Dreieck durch Ziehen an den Eckpunkten. Wenn ihr alles richtig gemacht habt, sollte Euch nun etwas auffallen!

Profifragen:

 1. Es gibt viel zu entdecken. Experimentiert weiter! Welche Sonderfälle treten auf? Bitte notiert diese in ganzen Sätzen in Euren Heften! (Eure Lösungsvorschläge könnten zum Beispiel so aussehen:
„Handelt es sich um ein spitzwinkliges/rechtwinkliges/... Dreieck, so ...“)

2. Was könnt ihr speziell für die Lage von S feststellen?

Entdeckt wurden diese Besonderheiten übrigens von Leonhard Euler, einem Schweizer Mathe-matiker, der von 1707 bis 1783 lebte und beispielsweise auf den Schweizer 10 Franken-Scheinen zu finden ist. Don zu Ehren sprechen wir auch von der _____

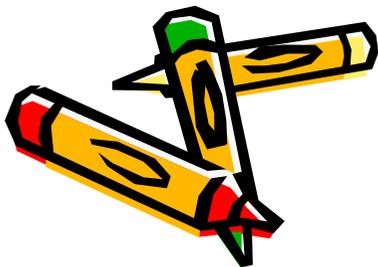


Merksatz:

In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und der Schnittpunkt M der Mittellinien auf einer Geraden. Diese Gerade heißt Euler-Gerade.

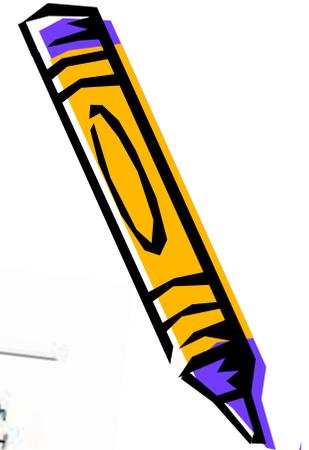
GeoGebra

Klasse 6



Gestaltung des Arbeitsblattes (2)

- Offene Fragestellung
- Profifragen für Schnelle
- Historischer Bezug
- Alltagsbezug (Schweizer 10 Franken-schein)
- Merksatzbox



Arbeitsblatt
Dreiecke

 Nach jeder Konstruktion sollt ihr wieder alle nicht benötigten Linien verbergen, so dass ihr nun lediglich Euer Dreieck $\triangle ABC$ und die vier Punkte M , I , S und H seht.

d.) Verändert das Dreieck durch Ziehen an den Eckpunkten. Wenn ihr alles richtig gemacht habt, sollte Euch nun etwas auffallen!

Profifragen:

 1. Es gibt viel zu entdecken. Experimentiert weiter! Welche Sonderfälle treten auf? Bitte notiert diese in ganzen Sätzen in Euren Heften! (Eure Lösungsvorschläge könnten zum Beispiel so aussehen:
„Handelt es sich um ein spitzwinkliges/rechtwinkliges/... Dreieck, so ...“)

2. Was könnt ihr speziell für die Lage von S feststellen?

Entdeckt wurden diese Besonderheiten übrigens von Leonhard Euler, einem Schweizer Mathe-matiker, der von 1707 bis 1783 lebte und beispielsweise auf den Schweizer 10 Franken-Scheinen zu finden ist. Don zu Ehren sprechen wir auch von der _____

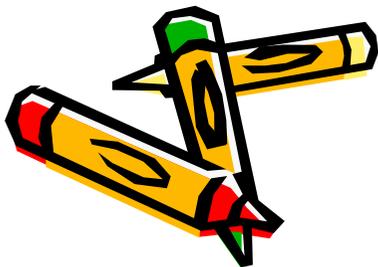


Merksatz:

In jedem Dreieck liegt der Schnittpunkt H der Höhen, der Schnittpunkt S der Seitenhalbierenden und der Schnittpunkt M der Mittellinien auf einer Geraden. Diese Gerade heißt Euler-Gerade.

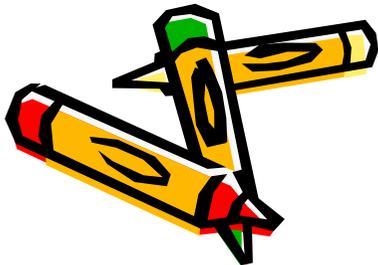
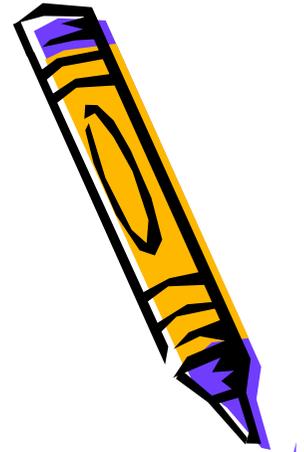
GeoGebra

Klasse 8



Fazit

- Eine gelungene Unterrichtsstunde mit breiter Schüleraktivierung!

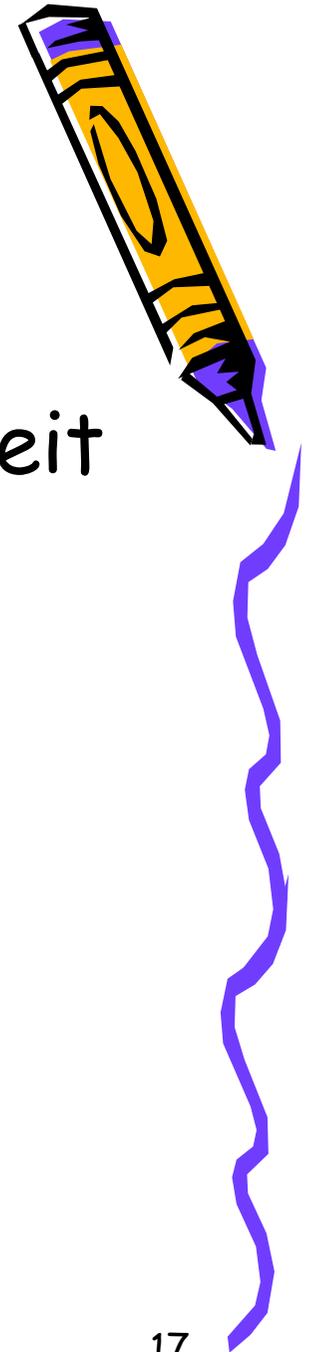
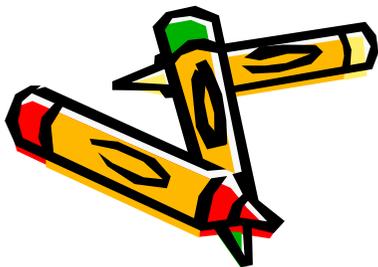


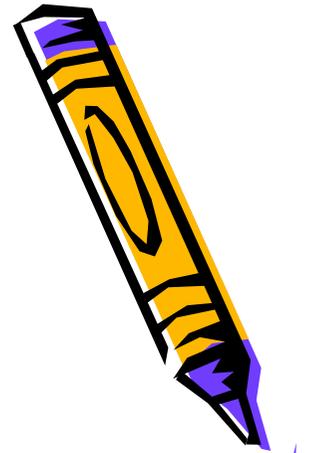
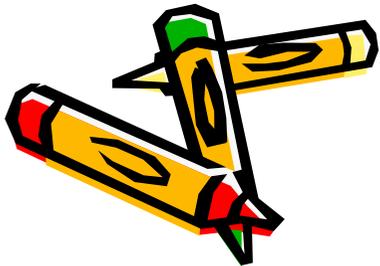
Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit



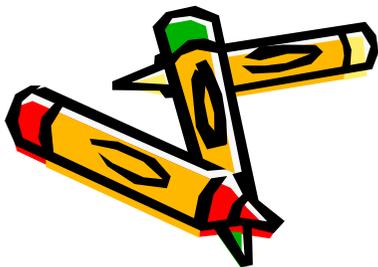
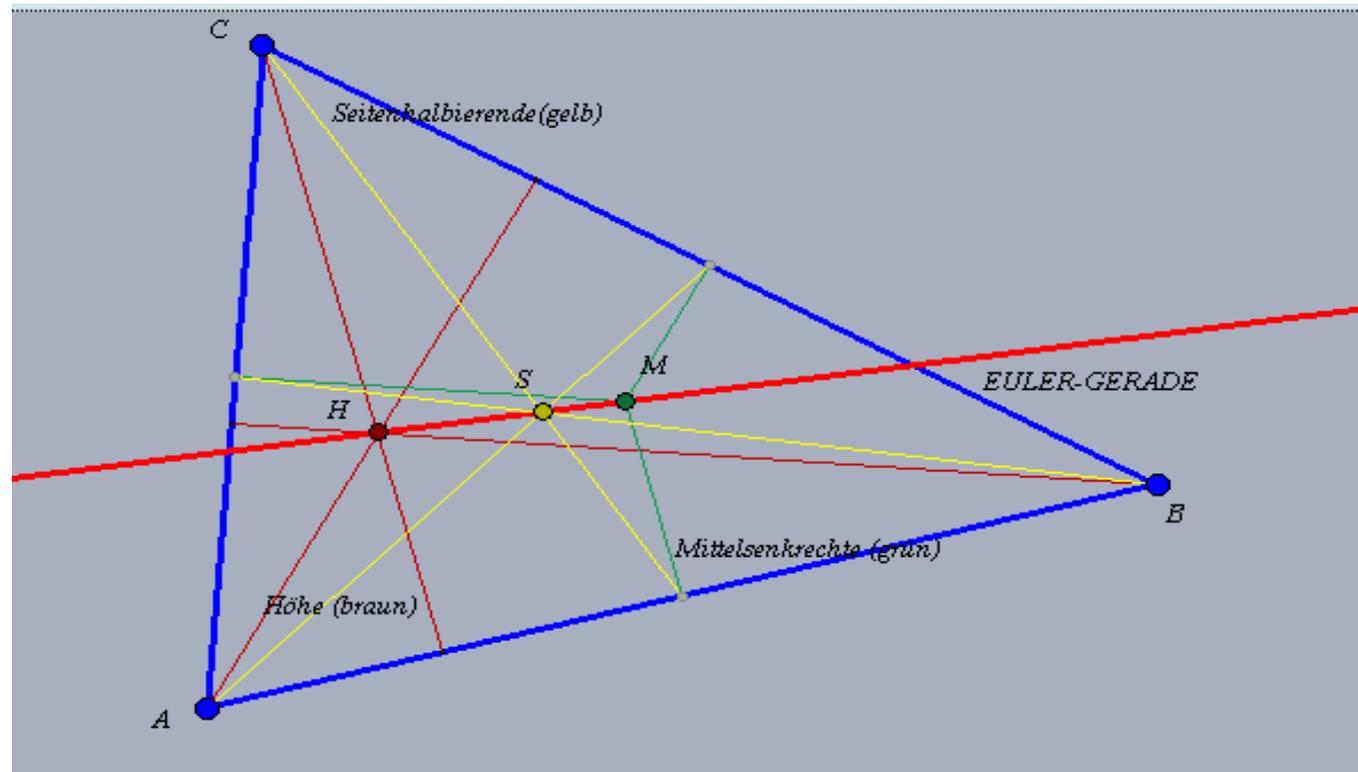
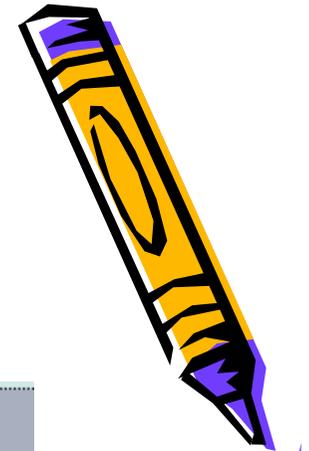
Powered by Christin Kostorz

Special Thanks to:
Bezirksregierung Köln
Studienseminar Bonn





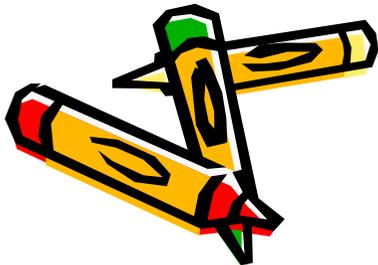
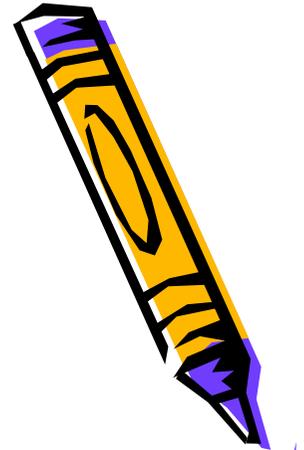
Was war noch gleich die Eulergerade?



Satz:

Der Höhenschnittpunkt H , der Schwerpunkt S und der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten M eines Dreiecks liegen stets auf einer Geraden (Euler-Gerade).

Dabei gilt: $|SM| = 0,5 \cdot |SH|$



Besonderheiten:

- Beim gleichschenkligen Dreieck liegt auch der Inkreismittelpunkt auf der Eulergeraden.
- Beim gleichseitigen Dreieck fallen die genannten drei Punkte zusammen, sodass die Eulergerade nicht definiert ist.

